ЛА - материал 13.11.12

$a_1, a_2 \dots a_n \in V$, $\lambda_1 \dots \lambda_n \in F$

$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$ - линейна комбинация (ЛК)

$W \subset V$ ако $\forall$ ЛК на вектори от W остава в W

$W \subset V \Leftrightarrow$ 1) $\forall a, b \in W \Rightarrow a+b \in W$

2) $\lambda \in F, a \in W \Rightarrow \lambda a \in W$

$W = \{(a\,b\,0) \mid a, b \in R\}$ тъй като R^3 е ЛК и за $\forall (a_1 b_1 0)(a_2 b_2 0) \in W$ и $\lambda \in R$ имаме

$$(a_1 b_1 0) + (a_2 b_2 0) \in W = (a_1+a_2, b_1+b_2, 0) \in W$$
$$\lambda(a_1 b_1 0) = (\lambda a_1, \lambda b_1, 0) \in W$$

$W \subseteq R^3 \Rightarrow W \subset R^3 \Rightarrow W$ е линейно пространство

V е линейно пространство (ЛП), $A \subseteq W$

$$e(A) = \{\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n \mid a_1 \dots a_n \in V, \lambda_x \in F\}$$

$(2.0.0) \subseteq R^3$; $e(\{2,0,0\}) = \{(a00) \mid a \in R\}$

$\{(1.2.0), (0,1,0)\} \Rightarrow e(\lambda_1, 2\lambda_2 + \lambda_2, 0 \mid \lambda\lambda \in R)$

V е ЛП ЛНЗ $\Rightarrow a_1 \dots a_n \in V \Rightarrow \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = \vec{0} \Rightarrow$
$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$

V е ЛП $B \subseteq V$, B е базис ако

1) B е ЛНЗ система от вектори
2) V е $e(B)$

$$R^3 = \{(a\,b\,c) \mid a\,b\,c \in R\}$$

$e_1(100)$, $e_2(010)$, $e_3(001)$ ЛНЗ вектори $\Rightarrow$
$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = (000) \Rightarrow (\lambda_1 00) + (0\lambda_2 0) + (00\lambda_3) = (000)$
$\Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (000) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

P^n - множеството от всички полиноми от степен $\leq n$

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

$x^n, x^{n-1} \dots x, 1$ - базис

$\lambda_1 x^n + \lambda_2 x^{n-1} - + \lambda_n = 0 x^n + \dots 0x + 0 = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$

V е ЛП, $e_1 \dots e_n$ образуват базис на V

$a \in V \Rightarrow a = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$

$a(\lambda_1 \dots \lambda_n)$ - координати на вектора

Векторите e_1 и e_2 образуват базис на двумерното пространство V

(измерението зависи от броят ЛНЗ вектора)

Да се докаже че векторите $a_1 = e_1 - e_2$, $a_2 = e_1 + e_2$ образуват базис на V и да се намерят координатите на вектора $v = e_1 - 5e_2$ спрямо базиса $a_1 a_2$

$\lambda_1 \lambda_2 \in F$

Допускане $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = 0e_1 + 0e_2$

$\lambda_1(e_1 - e_2) + \lambda_2(e_1 + e_2) = 0e_1 + 0e_2$

$(\lambda_1 + \lambda_2) e_1 + (\lambda_2 - \lambda_1) e_2 = 0e_1 + 0e_2$

$$\begin{vmatrix} 1\lambda_1 + 1\lambda_2 = 0 \\ -1\lambda_1 + 1\lambda_2 = 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{matrix}$$

т.е. $a_1 a_2$ са ЛНЗ

хомогенни координати с$\vec{v}$с $= 0$

нехомогенни координати с$\vec{v}$с $= a$?

μ_1 и $\mu_2 \in F$ т.че $\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 = v$

$\mu_1(e_1 - e_2) + \mu_2(e_1 + e_2) = e_1 - 5e_2$

$(\mu_1 + \mu_2)e_1 + (\mu_2 - \mu_1)e_2 = e_1 - 5e_2$

$$\left|\begin{array}{l} \mu_1 + \mu_2 = 1 \\ -\mu_1 + \mu_2 = -5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$V = (3, -2)$ или $3a_1 - 2a_2$

Векторите $e_1 e_2 e_3$ образуват базис на тримерното пространство V. Да се докаже че векторите $a_1 a_2 a_3$ също образуват базис на V и да се намерят координатите на $v = 2e_1 + 2e_2 + 2e_3$ в този базис $a_1 a_2 a_3$

а) $$\left.\begin{array}{l} a_1 = e_1 + e_2 + e_3 \\ a_2 = e_1 + e_2 + 2e_3 \\ a_3 = e_1 + 2e_2 + 3e_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$v = 2a_1 + 0a_2 + 0a_3$$

г) $$\left.\begin{array}{l} a_1 = e_1 + 2e_2 + 3e_3 \\ a_2 = 2e_1 + 5e_2 + 7e_3 \\ a_3 = 3e_1 + 7e_2 + 11e_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 7 & 2 \\ 3 & 7 & 11 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$v = 8a_1 + 0a_2 - 2a_3$$